

7

PROGNOZOWANIE PRODUKTYWNOŚCI DLA PRZEDSIĘBIORSTWA PRODUKCYJNEGO

7.1 WPROWADZENIE

Celem publikacji jest wyznaczenie wartości wskaźnika produktywności całkowitej na kolejny okres w przedsiębiorstwie produkcyjnym. W artykule zastosowane zostaną klasyczne metody prognozowania, które mogą mieć zastosowanie do przewidywania wskaźnika produktywności. Dokonana zostanie ocena wyznaczonych prognoz oraz wybór najlepiej dopasowanego sposobu prognozowania. Dobór metody zależy od wielu aspektów oraz czynników. Na produktywność mają wpływ zasoby wejściowe oraz wielkość sprzedanej produkcji. Szereg czasowy może charakteryzować się trendem, sezonowością oraz przypadkowymi obserwacjami, co także ma wpływ na wybór metody. Analizowany będzie szereg czasowy, w związku z czym zastosowanie mogą mieć metody adaptacyjne, takie jak [4, 5, 7]:

- średniej ruchomej,
- wygładzanie wykładnicze – model Browna,
- model Holta,
- model Wintersa,
- model trendu liniowego.

Produktywność jest to stosunek ilości produkcji wytworzonej i sprzedanej w rozpatrywanym okresie do ilości wykorzystywanych lub zużytych zasobów wejściowych [2]. W przedsiębiorstwach produkcyjnych pomiar efektywności wykorzystania zasobów jest istotny z punktu rentowności oraz zwiększania zysków.

7.2 ZAŁOŻENIA ORAZ METODA BADANIA

Badanie wykonane zostało dla dużego przedsiębiorstwa produkcyjnego w celu znalezienia właściwej metody prognozowania produktywności całkowitej. Przewidywanie przyszłych wartości wskaźnika pozwoli reagować z pewnym wyprzedzeniem. Odpowiednimi metodami są te, które bazują na analizie szeregów czasowych, ponieważ produktywność jest mierzona w równych odstępach czasowych. Powszechnie stosowanymi modelami prognostycznymi są modele adaptacyjne prognozowania krótkoterminowego.

Wyróżnia się następujące etapy związane z prognozowaniem [3]:

- sformułowanie zadania prognostycznego – określenie zmiennych prognozowanych, ustalenie celu prognozy oraz ustalenie horyzontu prognozy i warunków jej dopuszczalności,
- określenie przesłanek prognostycznych, w tym określenie czynników kształtujących badane zjawisko,
- zbieranie danych,
- wybór metody prognozowania,
- wyznaczanie prognoz,
- ocena dopuszczalności prognoz,
- wykorzystanie prognozy,
- weryfikacja i monitorowanie (przy powtarzalności) prognozy.

7.3 PRZEGLĄD METOD PROGNOZOWANIA

Najprostszą metodą wygładzania szeregu czasowego jest metoda średnich ruchomych. W metodzie tej wygładzanie dokonywane jest na podstawie wyznaczania średniej arytmetycznej dla kolejnych wartości. Ustala się ile elementów branych jest do wyznaczania średniej. Na tej podstawie tworzy się kolejny szereg, który jest już wygładzony w stosunku do szeregu wejściowego. Prognoza jest średnią arytmetyczną z k ostatnich obserwacji [1, 3]:

$$y_t^* = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k}^{t-1} y_i,$$

gdzie:

k – stała wygładzania,

t – wyraża czas o wartościach definiowanych, najczęściej zgodnie z numeracją kolejnych okresów (1,2,3, ..., $n+1$).

Modyfikacją tej metody jest zastosowanie zróżnicowanych wag przy obliczaniu średnich. W wygładzaniu wykładniczym każdy wyraz wygładzonego szeregu jest średnią ważoną wszystkich wcześniejszych wyrazów. Największą wagę ma ostatnia obserwacja, a wcześniejsze wyrazy mają tym mniejszą wagę, im „starsza” jest obserwacja [7].

Model wygładzania wykładniczego Browna stosuje się do prognozowania zjawisk charakteryzujących się brakiem trendu i sezonowości. Wartość teoretyczna (prognozowana) obliczana jest według wzoru [9]:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha) y_{t-1}^*,$$

gdzie:

α – stała wygładzania przyjmującą dowolną wartość z przedziału $[0,1]$,

t – kolejne okresy (1, 2, 3, ..., $n+1$).

Charakterystyką dokładności dla przedstawionych prognoz może być średni błąd kwadratowy (MSE), wyznaczony jako średnia arytmetyczna kwadratów błędów prognozy. Im niższa wartość wskaźnika, tym lepiej dopasowana prognoza.

Model Holta jest udoskonaleniem wygładzania wykładniczego. Metodę stosujemy, gdy wygładzanie wykładnicze wymaga dużej stałej wygładzania. Proces ten jest podzielony na dwa etapy służące odpowiednio do wyznaczania wygładzonych wartości [3]:

- szeregu czasowego w chwili t :

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}),$$

- przyrostu trendu w chwili t :

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1},$$

gdzie:

α, β – parametry wygładzania z przedziału $[0,1]$.

Wartość parametrów dobiera się na podstawie kryterium najmniejszego błędu średniego prognoz wygasłych s^* , gdzie:

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*(\alpha, \beta))^2}.$$

Prognoza wygasła wyznaczana jest na podstawie równania:

$$y_{t+1}^* = F_t + S_t.$$

Prognoza dla okresów przyszłych ($n+1, n+2, \dots, T$) wyznaczana jest na podstawie wzoru:

$$y_T^* = F_n + (T - n)S_n.$$

Wartość początkową F_1 najczęściej przyjmuje się jako y_1 , a $S_1 = y_2 - y_1$.

Model Wintersa jest uogólnieniem metody Holta i stosuje się go w przypadku szeregów czasowych z tendencją rozwojową, wahaniami sezonowymi oraz wahaniami przypadkowymi. Ten model występuje w dwóch wariantach, uwzględniając sezonowość multiplikatywną (względny poziom wahań sezonowych jest stały) lub addytywną (bezwzględny poziom wahań sezonowych jest w przybliżeniu stały) [10].

W modelu Wintersa występują trzy stałe wygładzania. W modelu multiplikatywnym stosuje się następujące zależności [11]:

- poziom zmiennej w chwili t :

$$F_t = \alpha \frac{y_t}{C_{t-r}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}),$$

- współczynnik trendu w chwili t :

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1},$$

- składnik sezonowy w chwili t :

$$C_t = \gamma \frac{y_t}{F_t} + (1 - \gamma)C_{t-r},$$

gdzie:

F_t – wygładzona wartość zmiennej prognozowanej w okresie t ,

S_t – wygładzona wartość przyrostu trendu w okresie t ,

C_t – ocena wskaźnika sezonowości w okresie t ,

r – długość cyklu sezonowego (liczba faz cyklu),

α, β, γ – parametry modelu o wartościach z przedziału $[0,1]$.

Równanie prognozy na okres t ma postać:

$$y_t^* = (F_{t-1} + S_{t-1}) \cdot C_{t-r}.$$

Równanie prognozy na okres $T > n$ przyjmuje postać:

$$y_T^* = (F_n + (T - n)S_n)C_{T-r}.$$

W modelu addytywnym parametry wyznacza się według zależności [11]:

- poziom zmiennej w chwili t :

$$F_t = \alpha(y_t - C_{t-r}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}),$$

- współczynnik trendu w chwili t :

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1},$$

- składnik sezonowy w chwili t :

$$C_t = \gamma(y_t - F_t) + (1 - \gamma)C_{t-r}.$$

Równanie prognozy na okres t ma postać:

$$y_t^* = (F_{t-1} + S_{t-1}) + C_{t-r}.$$

Równanie prognozy na okres $T > n$ ma postać:

$$y_T^* = F_n + (T - n)S_n + C_{T-r}.$$

Do budowy liniowego modelu wygładzania wykładniczego Wintersa potrzebne są początkowe wartości F , S i C . Propozycje doboru wartości początkowych są następujące:

- dla komponentu F można przyjąć rzeczywistą wartość zmiennej z szeregu czasowego odpowiadającą pierwszej fazie drugiego cyklu lub średnią wartość z pierwszego cyklu,
- dla komponentu S można przyjąć różnicę średnich wartości z drugiego i pierwszego cyklu bądź przyjąć 0,
- dla komponentu C (w kolejnych fazach pierwszego cyklu) można przyjąć ilorazy wartości rzeczywistej zmiennej z pierwszego

Model trendu liniowego wymaga znajomości regresji oraz modelowania ekonometrycznego. Stosowany jest gdy obserwujemy systematyczne zmiany w czasie (trend) oraz towarzyszące im zmiany przypadkowe. Zmienność można wtedy przybliżyć funkcją liniową o postaci [9]:

$$y_t^* = b_0 + b_1 t,$$

gdzie:

b_0 – wyraz wolny równania.

b_1 – współczynnik kierunkowy prostej (współczynnik trendu),

t – kolejne okresy (1,2,3....., $n+1$).

Najprostszym sposobem na określenie parametrów b_0 i b_1 jest zastosowanie klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Jej założeniem jest, że najlepiej dopasowaną do punktów empirycznych jest taka prosta, dla której suma kwadratów odchyleń wartości teoretycznych od wartości zaobserwowanych jest najmniejsza [9]:

$$S = \sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*)^2.$$

Szacowanie błędu prognozy dokonywane jest na podstawie prognoz wygasłych (ex post). Wykorzystuje się informacje o trafności prognozowania w przeszłości. Przyjmuje się, że trafność prognoz przyszłych będzie podobna do trafności prognoz przeszłych. Prognozy wygasłe używane do szacowania powinny być wyznaczane w ten sam sposób, jak ostateczna prognoza. Jako oszacowanie błędu prognozy można przyjąć średni względny błąd procentowy:

$$MPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_t - y_t^*}{y_t} \cdot 100\%$$

lub średni bezwzględny błąd procentowy:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - y_t^*|}{y_t} \cdot 100\%$$

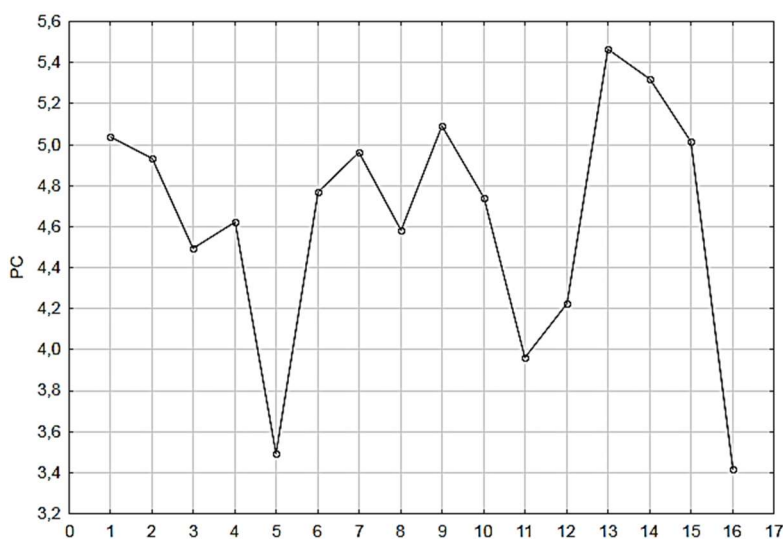
prognoz wygasłych. Ten sposób szacowania błędu prognozy stosuje się w modelach adaptacyjnych. Niekiedy przyjmuje się, że prognoza jest dopuszczalna, gdy szacowany błąd MPE nie przekracza 5-10% [3, 8].

7.4 PROGNOZOWANIE WSKAŹNIKA PRODUKTYWNOŚCI CAŁKOWITEJ

W przedsiębiorstwie produkcyjnym badano jego produktywność, dla której postanowiono wyznaczyć prognozę. Zmienna jaką jest wskaźnik produktywności całkowitej, mierzona jest w odstępach miesięcznych. Z badań wiadomo, że wpływ na produktywność mają procesy logistyczne jako zasoby wejściowe służące do ich realizacji. Pod takim kątem była wykonywana analiza produktywności. Poza realizowanymi procesami logistycznymi wskaźnik kształtowany jest poprzez poziom wyprodukowanych i sprzedanych produktów. Podjęcie próby prognozowania na kolejny okres ma na celu wybór odpowiedniej metody prognostycznej, która będzie właściwa dla przedsiębiorstwa, pozwalającej w przyszłości przewidzieć negatywne zmiany.

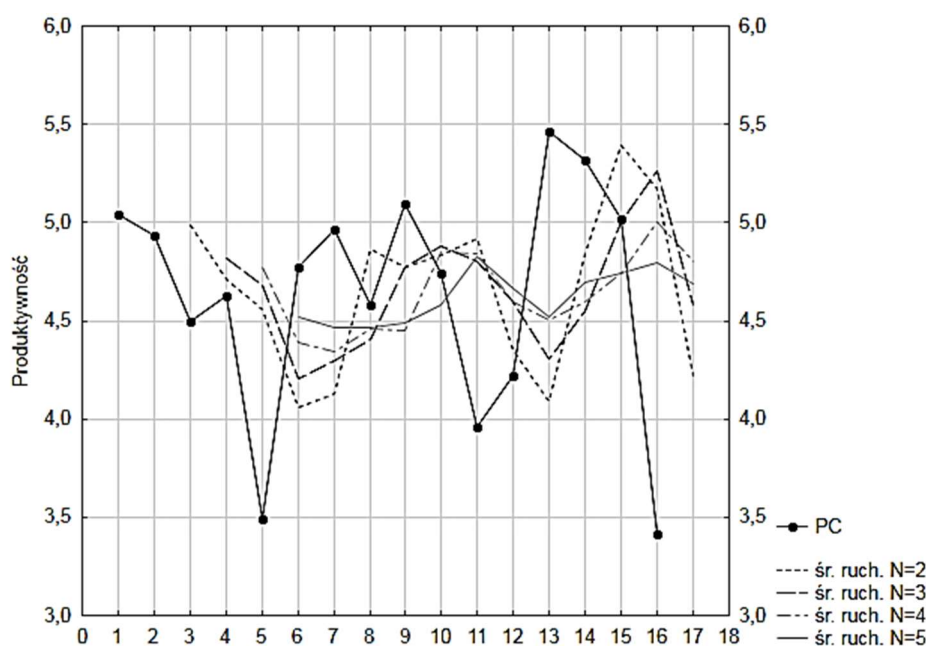
Dane zostały zabrane dla 16 miesięcy i są przedstawione na rysunku 7.1. Średnia wartość wskaźnika produktywności w przedsiębiorstwie wynosi 4,63. Na początku przeprowadzono prognozę wykorzystując metodę średnich ruchomych. Wykonano obliczenia z zastosowaniem program STATISTICA, dla średnich ruchomych dwu-, trzy-, cztero- i pięcioelementowych. Wyniki wygładzania wraz z prognozą przedstawia rysunek 7.2. W tabeli 7.1 znajdują się: wartość rzeczywista produktywności w ostatnim badanym okresie, prognozy dla 16 i 17 okresu oraz wyznaczone błędy prognoz. Widoczny jest spadek produktywności dla przyszłego okresu w porównaniu do prognozy z okresu 16, natomiast w porównaniu do wartości rzeczywistej wynoszącej 3,42 w 17 okresie produktywność będzie wyższa. W zależności od zastosowanego wygładzania może

to być spadek do najmniejszej wartości 4,22, porównując prognozy wykonane metodą średnich ruchomych (dwuelementowa).



Rys. 7.1 Produktywność całkowita w przedsiębiorstwie produkcyjnym

Źródło: opracowanie własne



Rys. 7.2 Szereg wygładzony średnimi ruchomymi wraz z prognozą

Źródło: opracowanie własne

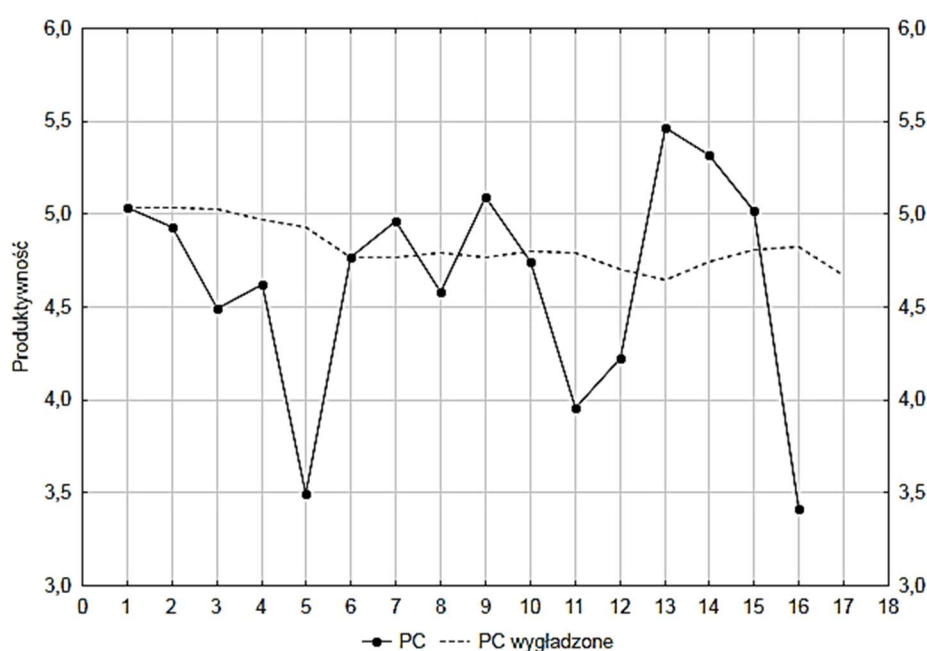
Tabela 7.1 Wyniki prognozy oraz błędy prognoz dla średnich ruchomych

Wygładzanie średnimi ruchomymi	PC rzeczywista dla 16 okresu	Prognoza 16 okres	Prognoza 17 okres	RMSE	MAPE	MPE
2 elementowymi	3,42	5,17	4,22	0,80	14,97%	-4,68%
3 elementowymi	3,42	5,27	4,58	0,81	15,15%	-4,18%
4 elementowymi	3,42	5,01	4,80	0,79	15,73%	-3,69%
5 elementowymi	3,42	4,80	4,69	0,67	12,77%	-0,48%

Źródło: opracowanie własne

Optymistyczna wersja wskazuje, że w 17 okresie produktywność może wynosić 4,8 (dla czteroelementowej średniej ruchomej). Wyznaczone błędy względne i bezwzględne dla prognoz wskazują, że najmniejszym błędem obarczona jest prognoza wykonana z zastosowaniem wygładzania średnią ruchomą dla 5 elementów. Dla tego przypadku wszystkie błędy są najniższe, czyli należałoby przyjąć, że wskaźnik przyjmie w kolejnym 17 okresie wartość 4,69. Dla okresu 5 i 16 (rys. 7.2) prognozy są najmniej trafne. Na podstawie ujemnych wartości MPE można wnioskować, że prognozy produktywności dla przedsiębiorstwa są niedoszacowane.

Z uwagi na względnie wysoki poziom MAPE postanowiono dokonać wygładzania wykładniczego metodą Browna (rys. 7.3).



Rys. 7.3 Szereg wygładzony poprzez wygładzanie wykładnicze wraz z prognozą

Źródło: opracowanie własne

Wartość prognozowana wynosi 4,67 przy zastosowaniu wygładzania wykładniczego Browna. Parametr α wynosi 0,112 i został dopasowany automatycznie przez program, biorąc jako kryterium minimalizację średniego błędu bezwzględnego. Wobec tego równanie opisujące zmienną ma następującą postać:

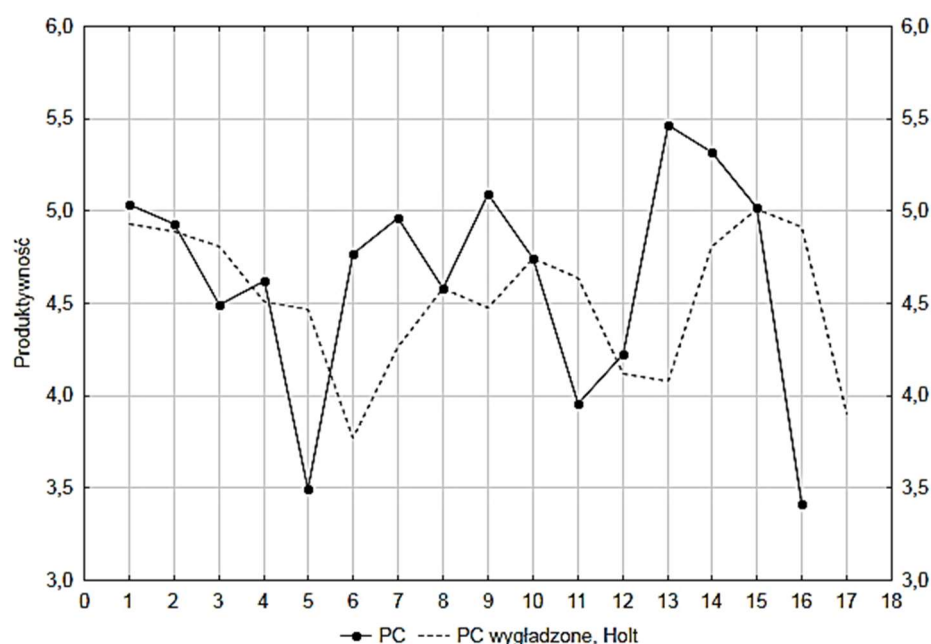
$$y_t^* = 0,112y_{t-1} + 0,888y_{t-1}^*$$

Błędy związane z wyznaczeniem prognozy wynoszą: RMSE = 0,64; MAPE = 11,41%; MPE = -6,36%. Porównując te wyniki z metodą średnich ruchomych (tabela 7.1), średni względny błąd procentowy jest wyższy i dlatego prognozę uznaje się za mniej wiarygodną.

Zastosowanie wygładzania wykładniczego zgodnie z modelem Holta wymagało dobrania parametrów, które również obliczono automatycznie przez program STATISTICA. Parametry te wynoszą odpowiednio: $\alpha = 0,604$, $\beta = 0,003$.

Prognoza dla 17 miesiąca wynosi 3,90 i jest to wartość najniższa z powyżej zastosowanych metod.

Wyznaczone błędy przyjmują wartości: RMSE = 0,70; MAPE = 11,62%; MPE = -0,35% i wskazują na to, że jest to dotychczas najlepsza prognoza. Charakteryzuje się najniższym średnim błędem prognozy (MPE). Na rysunku 7.4 widoczna jest zbieżność przebiegu krzywej produktywności całkowitej (rzeczywistej) z krzywą wygładzoną, jednakże z nieznacznym przesunięciem. W związku z tendencją spadkową w ostatnich okresach (14, 15, 16), w przyszłym okresie (17) prognozuje się wartość poniżej średniego poziomu dla przedsiębiorstwa.



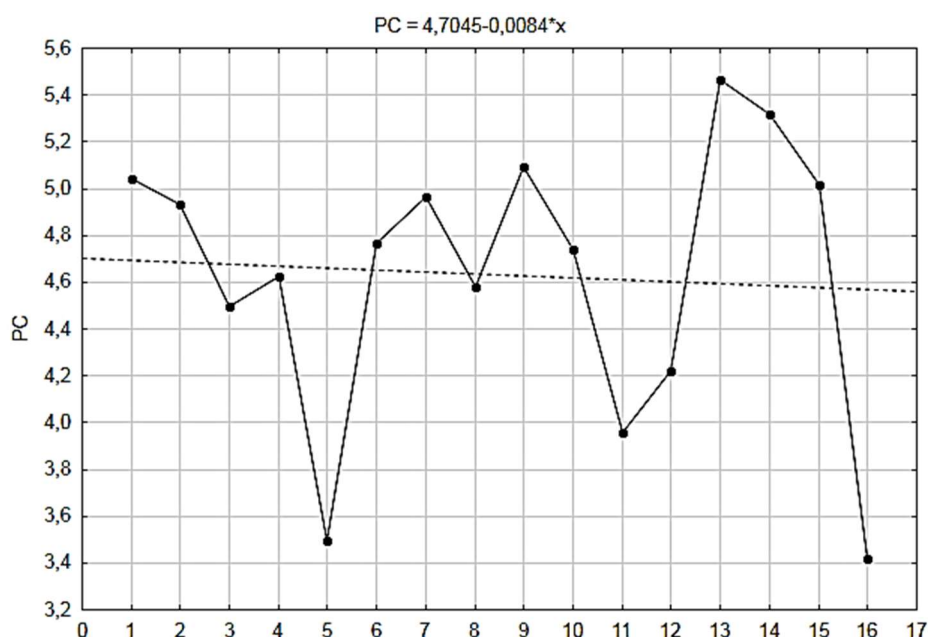
Rys. 7.4 Szereg wygładzony poprzez wygładzanie metodą Holta wraz z prognozą

Źródło: opracowanie własne

Model Wintersa nie został zastosowany, ponieważ dla zebranych danych nie było można wyróżnić sezonowości, ze względu na małą liczbę danych.

Jedną z najprostszych metod do zastosowania jest wyznaczenie trendu liniowego. Dostępne oprogramowania kalkulacyjne w szybki sposób pozwalają wyznaczyć równanie prostej linii trendu. Na rysunku 7.5 widoczna jest linia trendu opisana równaniem: $PC = 4,7045 - 0,0084 \cdot x$. W tym równaniu za x podstawia się liczbę kolejnego okresu, dla którego chcemy wyznaczyć prognozę. Dla 17 miesiąca prognozowana wartość produktywności przedsiębiorstwa wynosi 4,56. Wartości błędów dla tej prognozy wynoszą: RMSE = 0,58; MAPE = 10,61%; MPE = -1,78%. Wyznaczony w ten sposób model ma najniższe średnie odchylenie pomiędzy realizacją zmiennej i zmienną prognozowaną (RMSE). Jednakże przebieg linii trendu nie pokrywa się z krzywą produktywności. Średni błąd prognozy nie jest najniższy dla wszystkich zastosowanych metod (MPE). Współczynnik dopasowania linii jest

bardzo niski i wynosi 0,0045, co powoduje, że prognozę uznaje się za mało wiarygodną.



Rys. 7.5 Liniowy model trendu dla produktywności całkowitej (—●—) wraz z linią trendu (....)
Źródło: opracowanie własne

PODSUMOWANIE

Celem artykułu było omówienie prognozowania wskaźnika produktywności dla przedsiębiorstwa produkcyjnego. Dokonano tego wykorzystując wygładzanie średnimi ruchomymi, modelem Browna, Holta oraz poprzez wyznaczenie linii trendu. W wyznaczaniu wartości prognozowanych znaczenie miała bardzo niska wartość wskaźnika w ostatnim badanym okresie, w porównaniu do przedostatniego okresu. Z wszystkich adaptacyjnych metod najmniejszym średnim względnym błędem prognozy charakteryzował się model wyznaczony na podstawie wygładzania wykładniczego metodą Holta i dlatego jest on najbardziej odpowiedni dla badanego przedsiębiorstwa. Według tej metody w kolejnym okresie wskaźnik produktywności będzie wyższy od wartości rzeczywistej dla 16. miesiąca, chociaż jednak poniżej wartości średniej dla tego przedsiębiorstwa.

Prognozowanie wskaźników produktywności adaptacyjnymi metodami nie pozwoliło na opracowanie modelu dobrze dopasowanego. Warto w dalszych analizach wykorzystać modelowanie ekonometryczne i opracować model, który na podstawie zmiennych objaśniających pozwoli określić zależność pomiędzy różnymi czynnikami wpływającymi na wartość wskaźnika produktywności.

Nie mniej jednak przeprowadzona analiza pozwala zauważyć, że niezbędne są działania korygujące, które pozwolą podnieść wskaźnik produktywności do wyższego poziomu.

LITERATURA

- [1] A. Bovas, J. Ledolter, *Statistical methods for forecasting*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [2] W. F. Christopher, *Productivity measurement handbook*. Cambridge: Productivity Press, 1985.
- [3] L. Kowalski, *Modelowanie i prognozowanie. Materiały dydaktyczne*. Warszawa: 2010 <http://pis.rezolwenta.eu.org/Materialy/modelowanie.pdf>, data dostępu: 15.04.2017 r.
- [4] A. Maciąg, R. Pietroń, S. Kukła, *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, Warszawa: PWE, 2013.
- [5] A. Maniakowski, Z. Tarapata, *Prognozowanie i symulacja rozwoju przedsiębiorstw*. Warszawa: DrukTur sp. z o.o., 2011.
- [6] S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka, *Statystyka. Elementy teorii i zadania*. Wrocław: Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2011.
- [7] J. Podgórski, *Statystyka dla studiów licencjackich*. Warszawa: PWE, 2005.
- [8] M. Rabiej, *Statystyka z programem Statistica*. Gliwice: Helion, 2012.
- [9] W. Starzyńska, *Statystyka praktyczna*. Warszawa: PWN, 2005.
- [10] A. Wojciechowski, N. Wojciechowska, Zastosowanie klasycznych metod prognozowania popytu w logistyce dużych sieci handlowych. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego „Problemy zarządzania, finansów i marketingu”*, nr 41, t. 2, s. 545-555, 2015. DOI: 10.18276/pzfm.2015.41/2-44.
- [11] A. Zeliaś, B. Pawełek, S. Wanat, *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*. Warszawa: PWN, 2004, s. 140-151.

Data przesłania artykułu do Redakcji: 10.2017

Data akceptacji artykułu przez Redakcję: 11.2017

PROGNOZOWANIE PRODUKTYWNOŚCI DLA PRZEDSIĘBIORSTWA PRODUKCYJNEGO

Streszczenie: Celem publikacji jest wyznaczenie wartości wskaźnika produktywności całkowitej na kolejny okres w przedsiębiorstwie produkcyjnym. W artykule zastosowano klasyczne metody prognozowania, które mogą mieć zastosowanie do przewidywania wskaźnika produktywności. Dokonana została ocena wyznaczonych prognoz oraz wybór najlepiej dopasowanego sposobu prognozowania. Celem analizy jest szacowanie przyszłych wartości produktywności, aby z wyprzedzeniem można było reagować na przewidywane spadki. W wyniku przeprowadzonych badań najmniejszym średnim względnym błędem prognozy obarczony był model wyznaczony za pomocą wygładzania wykładniczego metodą Holta.

Słowa kluczowe: produktywność, prognozowanie, wygładzanie szeregu czasowego

PRODUCTIVITY FORECASTING FOR A MANUFACTURING COMPANY

Abstract: The aim of the publication is to determine the value of the total productivity index for the next period in the manufacturing company. In the article uses classical forecasting methods that can be used to forecast the productivity index. An assessment of the forecasts and the selection of the best fit for forecasting has been done. The aim of the analysis is to estimate the future value of productivity so that anticipation can be anticipated in advance. As a result of the research, the smallest mean percentage error was burdened by a model determined by Holt exponential smoothing.

Key words: forecasting, productivity, smoothing time series

mgr inż. Michaela Rostek

Politechnika Opolska
Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
Instytut Innowacyjności
Procesów i Produktów
Katedra Zarządzania i Inżynierii Produkcji
ul. Prószkowska 76, 45-758 Opole, Polska
e-mail: m.rostek@po.opole.pl

prof. dr hab. inż. Ryszard Knosala

Politechnika Opolska
Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki
Instytut Innowacyjności
Procesów i Produktów
Katedra Zarządzania i Inżynierii Produkcji
ul. Prószkowska 76, 45-758 Opole, Polska
knosala@po.opole.pl